Números Extremais de Grafos Bipartidos

Lembre-se que

$$ex(n, H) = \max\{e(G) : v(G) = n \text{ e } G \text{ é } H\text{-livre}\}$$

Nesta aula vamos focar na pergunta:

Para quais grafos H existe $c = c(H)$ tal que $ex(n, H) \geqslant cn^2$ para todo $n \geqslant 2$?

Se H ñ é bipartido, então todo grafo G bipartido é H-livre, em particular o $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ é H-livre.

$$(2\ell+1)^2 = \frac{4\ell^2 + 4\ell + 1}{4}$$

$$n = 2\ell + 1$$

$$e(K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{2\ell+1}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{2\ell+1}{2} \right\rfloor = (\ell+1)\ell = \ell^2 + \ell = \frac{4\ell^2 + 4\ell + 1 - 1}{4}$$

$$= \frac{(2\ell+1)^2 - 1}{4} = \frac{n^2}{4} - \frac{1}{4}$$

Assim, para um grafo H ñ bipartido, temos

$$ex(n, H) \geqslant \frac{n^2}{4} - \frac{1}{4}$$

Logo $ex(n, H) = \Omega(n^2)$

$$\frac{n^2}{4} - \frac{1}{4} \geqslant \frac{n^2}{8} + \boxed{\frac{n^2}{8} - \frac{1}{4}} \geqslant \frac{n^2}{8}$$

$$\frac{n^2}{8} - \frac{1}{4} \geqslant 0 \Leftrightarrow n^2 \geqslant \frac{8}{4} \Leftrightarrow n^2 \geqslant 2$$

$$\sqrt{n^2} \geqslant \sqrt{2}$$

$$n = |n| \geqslant \sqrt{2}$$

Como $e(G) \leqslant \binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$

$$\frac{n(n+1)}{2} \leqslant \frac{n^2 + n}{2} \leqslant \frac{n^2 + n^2}{2} = 1.n^2$$

Temos que $ex(n, H) = \Theta(n^2)$ para um grafo ñ bipartido

Para $n, k \in \mathbb{N}$, sabemos que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Isto é

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)(n-2)\cdots\overset{-(k-1)}{(n-k+1)}\cancel{(n-k)!}}{k!\,\cancel{(n-k)!}} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$$

Isto nos leve estender a definição de Binômio da seguinte forma: para $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$$

Prop. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{R}$. Mostre que, se $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ são tais que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s$, então

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{x_i}{2} \geq n \cdot \binom{s/n}{2}$$

Demonstração

Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ t.q. $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s$ e que minimiza $\sum_{i=1}^{n} \binom{x_i}{2}$.

AF. $x_i = x_j \quad \forall\, i \neq j$

- Suponha para uma contradição que $x_i \neq x_j$ e defina $x'_k = \begin{cases} x_k & \text{se } k \notin \{i,j\} \\ \frac{x_i + x_j}{2} & \text{se } k \in \{i,j\} \end{cases}$

- Assim $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{x'_k}{2} - \sum_{k=1}^{n} \binom{x_k}{2} = \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{x'_k}{2} - \binom{x_k}{2} \right]$

$$= \sum_{k \in [n] \setminus \{i,j\}} \left[\binom{x'_k}{2} - \binom{x_k}{2} \right] + \binom{x'_i}{2} - \binom{x_i}{2} + \binom{x'_j}{2} - \binom{x_j}{2}$$

$$= 0 + 2\binom{x'_i}{2} - \binom{x_i}{2} - \binom{x_j}{2}$$

$$= 2\binom{\frac{x_i + x_j}{2}}{2} - \binom{x_i}{2} - \binom{x_j}{2} = \cancel{2}\left[\frac{\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right)\left[\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right) - 1\right]}{\cancel{2}} \right] - \binom{x_i}{2} - \binom{x_j}{2}$$

$$= \frac{(x_i + x_j)^2}{4} - \frac{(x_i + x_j)}{2} - \frac{x_i(x_i - 1)}{2} - \frac{x_j(x_j - 1)}{2}$$

$$= \frac{(x_i + x_j)^2}{4} - \frac{(x_i + x_j)}{2} - \frac{x_i^2 - x_i}{2} - \frac{x_j^2 - x_j}{2}$$

$$= \frac{(x_i + x_j)^2 - 2(x_i + x_j) - 2(x_i^2 - x_i) - 2(x_j^2 - x_j)}{4}$$

$$= \frac{x_i^2 + 2x_i x_j + x_j^2 - 2x_i - 2x_j - 2x_i^2 + 2x_i - 2x_j^2 + 2x_j}{4}$$

$$= \frac{-x_i^2 - x_j^2 + 2x_i x_j}{4}$$

$$= \frac{-(x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2)}{4}$$

$$= -\frac{(x_i - x_j)^2}{4} < 0 \;!$$

Pela afirmação temos que $x_i = \frac{s}{n}$ para todo i

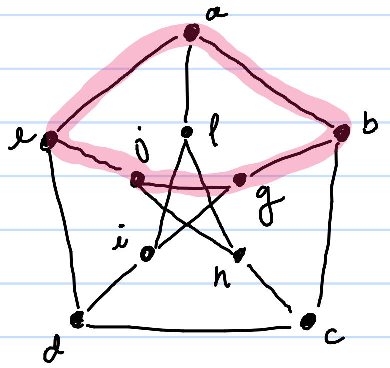
Assim, $\sum_{i=1}^{n} \binom{x_i}{2} = \sum_{i=1}^{n} \binom{\frac{s}{n}}{2} = n \binom{s/n}{2}$. $\square$

Um <u>ciclo</u> em um grafo G é uma sequência de vértices

$$v_0, v_1, v_2, \dots, v_\ell, v_0$$

tal que (i) $v_i v_{i+1} \in E(G)$ $\forall$ $i = 0, \dots, \ell$, onde definimos que $v_{\ell+1} = v_0$, (ii) os vértices $v_0, v_1, \dots, v_\ell$ são distintos, e (iii) $\ell \geq 2$.

Ex:



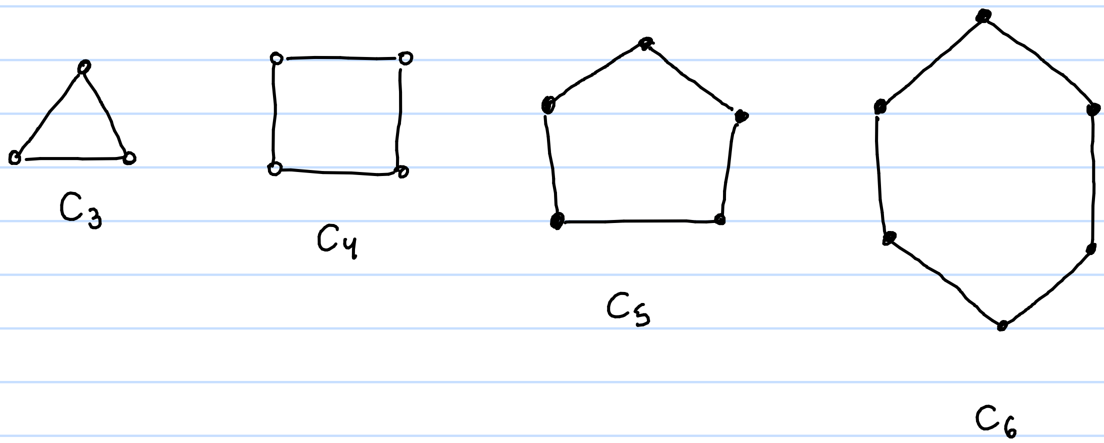
$C = j, g, b, a, e, j$

O <u>grafo ciclo</u> com n vértices, denotado por C_n, é o grafo definido como

$$V(C_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

$$E(C_n) = \{u_i u_{i+1} : i = 1, \dots, n-1\} \cup \{u_n u_1\}$$

Ex

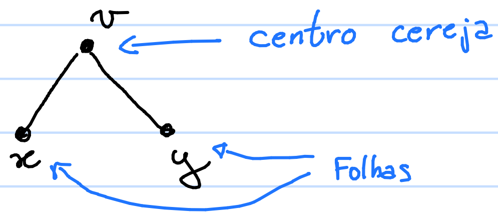


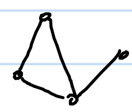
Teo (Erdős, 1938) Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

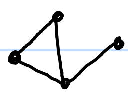
$$ex(n, C_4) \leq n^{3/2}.$$

Demonstração

- A ideia para provar esse resultado é contar cerejas, onde uma cereja é $K_{1,2}$.
- Dizemos que o vértice v é o centro de uma cereja, se ele tem grau 2, caso contrário dizemos que ele é uma folha





- Seja G um grafo C_4-livre com o maior nº de arestas possível
- É fácil perceber que $e(G) \geq n$: se $n \neq 4$, então C_n é um grafo C_4 livre t.q. $e(G) = n$. Se $n = 4$, então  é esse grafo
- O número de cerejas centradas em um vértice v é precisamente $\binom{d(v)}{2}$
- Pelo lema do aperto de mãos, $\sum_{u \in V(G)} d(u) = 2e(G)$
- Seja X o nº total de cerejas de G
- Então, pela proposição anterior

$$X = \sum_{u \in V(G)} \binom{d(v)}{2} \geq n \binom{2e(G)/n}{2} = \frac{n}{2} \prod_{i=0}^{1} \left(\frac{2e(G)}{n} - i \right)$$

$$= \frac{\cancel{n}}{\cancel{2}} \left(\frac{\cancel{2}\, e(G)}{\cancel{n}} \right) \left(\frac{2e(G)}{n} - 1 \right)$$

$$= e(G) \left(\frac{2e(G)}{n} - 1 \right)$$

$$= \frac{2e(G)^2}{n} - e(G)$$

$$= \frac{e(G)^2}{n} + \boxed{\frac{e(G)^2}{n} - e(G)} \geq 0$$

$$\geq e(G)^2/n$$

$$\frac{e(G)^2}{n} - e(G) \overset{?}{\geq} 0$$

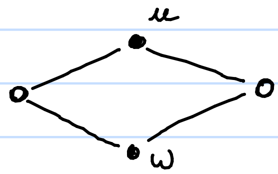
$$\Updownarrow$$

$$\frac{e(G)}{n} - 1 \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$e(G) \geq n \quad ✓$$

- Agora observe que se um dado par $\{u, w\}$ são folhas de duas cerejas distintas, então G possui um C_4.



- Como G é C_4-livre, pelo princípio da casa dos pombos, o número de cerejas é no máximo $\binom{n}{2}$, ou seja,

$$X \leq \binom{n}{2}$$

- Assim

$$\frac{e(G)^2}{n} \leq X \leq \binom{n}{2} \leq \frac{n^2}{2}$$

- Portanto

$$\frac{e(G)^2}{n} \leq \frac{n^2}{2} \iff e(G)^2 \leq \frac{n^3}{2} \iff \sqrt{e(G)^2} \leq \sqrt{\frac{n^3}{2}}$$

$$e(G) = |e(G)| \leq \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{n^3} = n^{3/2}$$

$\square$

O teorema anterior foi generalizado por Kővári, T. Sós, Turán em 1954 p/ um grafo bipartido completo arbitrário.

→ A demonstração é praticamente a mesma coisa.

Teo. (Kővári, T. Sós, Turán) Sejam $s,t \in \mathbb{N}$ com $s \leq t$. Existe $c = C(s,t) > 0$ tal que
$$ex(n, K_{s,t}) \leq C n^{2-1/s}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração (Exercício)

O resultado anterior mostra que se H um grafo bipartido completo, então
$$e(n, H) = o(n^2)$$

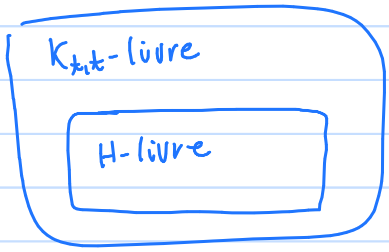
$$\lim_{n\to\infty} \frac{Cn^{2-1/s}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{C\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\, n^{1/s}} = \lim_{n\to\infty} \frac{C}{n^{1/s}} = 0$$

Corolário. Seja H um grafo
$$ex(n,H) = o(n^2) \text{ sse } H \text{ é bipartido}$$

Demonstração

($\Leftarrow$) Se H é bipartido com t vértices, então $H \subseteq K_{t,t}$
Então G tbm é $K_{t,t}$-livre
Pelo resultado anterior,

$$ex(n,H) \leq ex(n, K_{t,t}) \leq C n^{2-1/t} = o(n^2)$$



Assim $ex(n,H) = o(n^2)$.

($\Rightarrow$) Se $e(n,H) = o(n^2)$, então H é bipartido, pois sabemos que se H fosse não bipartido, então $n = \Omega(n^2)$.

$\square$